

Analisis kesalahan pemahaman konsep mahasiswa pada materi integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang

Frida Marta Argareta Simorangkir¹, Ferry Indra Sakti H Sinaga²

Abstrak: Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif untuk menganalisis kesalahan pemahaman konsep mahasiswa dalam menyelesaikan masalah terkait integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang. Sebanyak 15 orang mahasiswa mengambil mata kuliah Kalkulus Lanjut dan menjadi subjek dalam penelitian ini. Pengumpulan data dengan menggunakan test tertulis dan dokumentasi. Adapun hasil test tertulis serta dokumentasi hasil penyelesaian masalah mahasiswa dianalisis berdasarkan indikator pemahaman konsep dan disesuaikan dengan hasil display data. Hasil analisis kesalahan pemahaman konsep mahasiswa berdasarkan indikator pemahaman konsep yaitu (1) menyatakan ulang konsep integral. Pada indikator ini, mahasiswa belum memahami dengan baik urutan dari variabel x dan y sebagai integran. Mahasiswa masih belum tepat menentukan batas atas dan bawah dari variabel x dan y . (2) Mempresentasikan fungsi $f(x,y)$ ke dalam grafik. Pada indikator ini mahasiswa langsung membuat sketsa tanpa membuat tabel pembantu, memplot titik dan membuat grafik. (3) Memilih dan menggunakan prosedur yang sesuai, dan (4) menggunakan konsep dan memilih algoritma penyelesaian masalah. Masih terdapat kesalahan mahasiswa dalam memilih dan menggunakan prosedur dan penggunaan algoritma pemecahan masalah disebabkan kurangnya pengetahuan awal mahasiswa terkait geometri, diferensial dan integral.

Kata Kunci: *Pemahaman Konsep; Integral Lipat Dua*

Abstract: *This research is a qualitative descriptive study to analyze students' misconceptions in solving problems related to double integrals over non-rectangular areas. A total of 15 students took the Advanced Calculus course and became subjects in this study. Data collection using written tests and documentation. The results of the written test and documentation of the results of student problem solving were analyzed based on indicators of concept understanding and adjusted to the results of data display. The results of the analysis of students' conceptual understanding errors based on the indicators of concept understanding are (1) restating the integral concept. In this indicator, students do not understand well the order of the variables x and y as integrators. Students are still not precise in determining the upper and lower limits of the variables x and y . (2) Presenting the function $f(x,y)$ into a graph. In this indicator, students immediately make sketches without making auxiliary tables, plotting points and making graphs. (3) Selecting and*

¹ Universitas Katolik Santo Thomas, Medan, Indonesia, fridasimorangkir86@gmail.com

² Universitas Negeri Medan, Medan, Indonesia, ferry.indra.sinaga@gmail.com

using appropriate procedures, and (4) using concepts and selecting problem solving algorithms. There are still student errors in choosing and using procedures and the use of problem solving algorithms due to a lack of prior knowledge of students related to geometry, differential and integral.

Keywords: *Conceptual Understanding; Two Fold Integral*

A. Pendahuluan

Dalam matematika, materi integral sudah dipelajari dari jenjang sekolah menengah hingga perguruan tinggi. Mahasiswa sudah dibekali pengetahuan terkait integral sehingga pemahaman konsep menjadi lebih kuat untuk mempelajari konsep integral yang dipelajari di perguruan tinggi. Salah satu materi yang dipelajari yaitu integral lipat dua. Integral lipat dua pada mata kuliah Kalkulus Lanjut terdiri dari integral lipat dua atas daerah persegi panjang dan integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang.

Penelitian ini difokuskan pada materi integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang. Dalam mempelajari materi ini banyak materi prasyarat yang harus dikuasai oleh mahasiswa diantaranya materi terkait geometri, diferensial dan integral. Untuk itu diperlukan pemahaman konsep yang dapat membantu mahasiswa mempelajari materi integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang. Hal ini sejalan dengan pendapat Sulistyorini (2019) bahwa pematangan konsep dasar integral lipat dua penting dimiliki oleh peserta didik. Wujud dari pematangan konsep tersebut ditunjukkan dengan gestur menunjuk, representasi dan menulis.

Dalam pembelajaran Kalkulus Lanjut di semester 4, khususnya materi integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang masih banyak terdapat kesalahan pemahaman konsep mahasiswa. Kesalahan tersebut disebabkan oleh konsep dasar yang tidak dikuasai. Seperti yang dikemukakan Muchlis (2017) bahwa pada materi integral lipat seringkali ditemukan kesalahan pada konsep dasarnya, bukan pada *contain* konsep integral lipatnya. Selain itu, Wahyuni, et al. (2019) juga menyatakan bahwa kesalahan konsep yang sering dilakukan peserta didik dalam mempelajari integral yaitu kesalahan dalam menentukan nilai batas, menghitung integral yang disebabkan oleh ketidak telitian dalam menyelesaikan soal, tidak memahami konsep pengintegralan dan hanya menghafal konsep.

Kesalahan pemahaman konsep terkait pengintegralan juga diketahui dari hasil penelitian Rahma Dkk (2021) bahwa kesalahan dalam memilih dan menggunakan prosedur algoritma pemecahan masalah dikarenakan kurangnya pengetahuan awal peserta didik mengenai materi prasyarat yakni integral trigonometri dan fungsi trigonometri. Demikian pula hasil penelitian Apriandi dan Ika (2016) menyatakan bahwa pemahaman untuk menggambar grafik masih kurang dipahami serta masih kurangnya pemahaman konsep. Pada penyelesaian menggambar, masih ada kesalahan dalam menentukan batasan atau interval dan hal ini mengakibatkan kesalahan dalam proses menghitung hasil akhirnya.

Oleh karena itu perlu dikaji dan dianalisis lebih lanjut bentuk kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan masalah terkait integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang. Adapun indikator pemahaman konsep dalam penelitian ini mengacu pada Indikator Pemahaman Konsep (Depdiknas, 2006) yaitu (1) menyatakan ulang sebuah konsep, (2) merepresentasikan konsep ke bentuk lain, (3) memilih dan menggunakan prosedur yang sesuai dan (4) menggunakan konsep dan memilih algoritma penyelesaian masalah.

Berdasarkan hal tersebut diharapkan pemahaman konsep mahasiswa, khususnya pada materi integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang lebih ditingkatkan dan kesalahan dapat diminimalisir. Menganalisis kesalahan mahasiswa dalam materi integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang dapat membantu untuk evaluasi pembelajaran berikutnya (Raupu, et al. 2020).

B. Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif. Subjek dalam penelitian ini adalah 15 mahasiswa semester empat tahun ajaran 2021/2022 yang mengambil mata kuliah Kalkulus Lanjut. Penelitian ini dilaksanakan di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Program Studi Pendidikan Matematika.

Adapun indikator pemahaman konsep digunakan dalam penelitian ini dapat dilihat pada tabel 1 berikut.

Tabel 1. Indikator Pemahaman Konsep

No	Indikator Pemahaman Konsep	Nomor Butir Soal
1	Menyatakan ulang sebuah konsep	1
2	Merepresentasikan konsep ke bentuk lain	2
3	Memilih dan menggunakan prosedur yang sesuai	3
4	Menggunakan konsep dan memilih algoritma penyelesaian masalah	3

(Modifikasi Depdiknas, 2006)

Data dalam penelitian ini dikumpulkan dengan menggunakan teknik tes dan dokumentasi. Tes digunakan untuk mengetahui kesalahan pemahaman konsep mahasiswa dalam menjawab soal-soal integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang. Soal tes yang diberikan adalah soal yang sesuai dengan indikator pemahaman konsep yang digunakan sesuai dengan Tabel 1. Penelitian ini dilaksanakan secara luring karena pembelajaran sudah dilaksanakan secara luring. Dokumentasi digunakan sebagai data pendukung untuk menjelaskan jawaban mahasiswa. Setelah data terkumpul kemudian dianalisis diambil kesimpulan.

C. Temuan dan Pembahasan

Setelah dilakukan diskusi dan mengingat kembali materi yang sudah dipelajari sebelumnya yaitu terkait konsep diferensial, integral, integral lipat dua atas daerah persegi panjang, serta integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang kemudian diberikan tes. Soal test sebanyak 3 soal uraian.

Dalam menyelesaikan soal test tersebut dan setelah dianalisis terdapat beberapa kesalahan pemahaman konsep mahasiswa ditinjau dari indikator pemahaman konsep.

1) Kesalahan dalam Menyatakan Ulang Konsep Integral

Terdapat kesalahan dalam menyatakan ulang konsep integral seperti pada Gambar 1 berikut.

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 y \, dy \, dx &= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{2x} \cdot dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 (2x)^2 - (x^2)^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^2 - x^4) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} (2^3) - \frac{1}{5} (2^5) - 0 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{15} = \frac{32}{15}
 \end{aligned}$$

Gambar 1. Jawaban Subjek A₁ dalam menuliskan ulang konsep integral

Pada gambar 1, dapat dilihat proses penyelesaian $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 y \, dy \, dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{2x} dx$, dari penyelesaian tersebut dilakukan pengintegralan fungsi $f(x,y) = x^2 y$ terhadap y dengan batas x^2 sampai $2x$. Subjek A₁ tidak menganggap variabel x konstan tetapi menghilangkan variabel x .

Berdasarkan konsep Integral Berulang bahwa $\int_c^d \int_a^b f(x,y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) \, dx \right] dy$. Dalam hal ini yang pertama fungsi $f(x,y)$ diintegrasikan terhadap x dengan batas a sampai b dan menganggap y konstan. Kemudian hasil integral terhadap x diintegrasikan terhadap y dengan batas c sampai d .

Seharusnya jawaban Subjek A₁ sebagai berikut:

(i) pengintegralan terhadap y

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 y \, dy \, dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{x^2}^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 [(2x)^2 - (x^2)^2] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^4 - x^6) dx$$

(ii) pengintegralan terhadap x

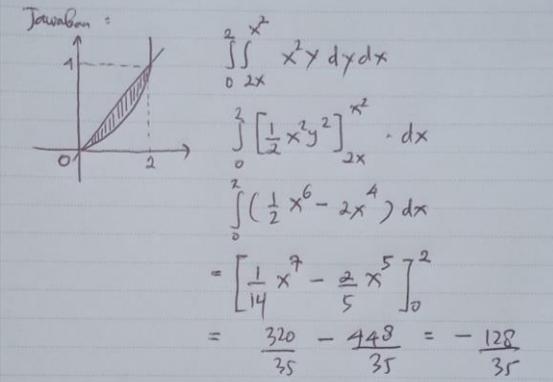
$$\frac{1}{2} \int_0^2 (4x^4 - x^6) dx = \int_0^2 \left(2x^4 - \frac{1}{2} x^6 \right) dx = \left[\frac{2}{5} x^5 - \frac{1}{14} x^7 \right]_0^2 = \frac{128}{35}$$

2) Kesalahan dalam Mempresentasikan Fungsi $f(x,y)$ ke dalam Grafik

Terdapat kesalahan dalam mempresentasikan fungsi (x,y) ke dalam grafik seperti pada Gambar 2 berikut:

Hitunglah nilai dari $\iint_D x^2 y \, dA$ dengan D adalah daerah yang dibatasi oleh garis $y=2x$ dan $y=x^2$.

Jawaban:



$$\int_0^2 \int_{2x}^{x^2} x^2 y \, dy \, dx$$

$$\int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{2x}^{x^2} \cdot dx$$

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^6 - 2x^4 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{14} x^7 - \frac{2}{5} x^5 \right]_0^2$$

$$= \frac{320}{35} - \frac{448}{35} = -\frac{128}{35}$$

Gambar 2. Jawaban Subjek A₅ dalam mempresentasikan fungsi (x,y) ke dalam grafik

Pada gambar 2, dapat dilihat Subjek A₅ mempresentasikan fungsi (x,y) ke dalam grafik. Sebaiknya ada beberapa hal yang harus dilakukan terlebih dahulu yaitu membuat tabel pembantu untuk dapat menentukan titik-titik yang memenuhi persamaan fungsi pada soal, memplot titik-titik pada koordinat Cartesius dan membentuk kurva dari plot titik-titik tersebut. Subjek A₅ membuat grafik tanpa mengikuti langkah-langkah tersebut. Hal ini juga sesuai dengan pendapat Ningtyas et al. (2019) yang menyatakan bahwa untuk merepresentasikan ide-ide matematika dalam menyelesaikan soal-soal kalkulus, peserta didik mampu menampilkan ide-ide secara multirepresentatif namun tidak lengkap, tidak runut dan tidak tepat secara numerik.

Pada gambar 2, Subjek A₅ menentukan nilai batas dari x dan y yaitu $0 \leq x \leq 2$ dan $2x \leq y \leq x^2$ sehingga dituliskan $\int_0^2 \int_{2x}^{x^2} x^2 y \, dy \, dx$. Dengan menggunakan batas x dan y yang salah maka diperoleh nilai $\int_0^2 \int_{2x}^{x^2} x^2 y \, dy \, dx = -\frac{128}{35}$. Hal ini tentunya tidak tepat. Kesalahan tidak tepat ini diawali dari kurangnya pemahaman terkait integral sebagai pengetahuan prasyarat dan masih cenderung menghafal konsep (Nurhikmah & Febrian, 2016).

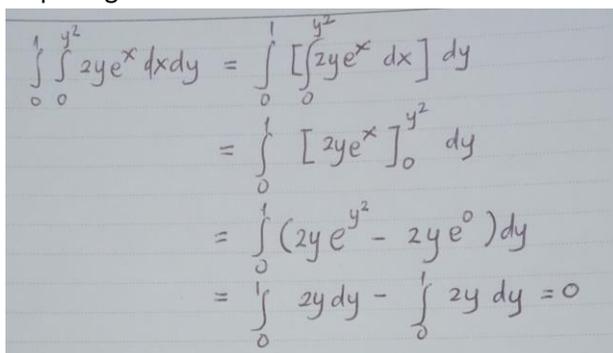
Seharusnya daerah D dibatasi oleh $0 \leq x \leq 2$ dan $x^2 \leq y \leq 2x$ maka dapat dituliskan $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 y dy dx$.

Prosedur yang tepat sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 y dy dx &= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{x^2}^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 [(2x)^2 - (x^2)^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^4 - x^6) dx \\ \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^4 - x^6) dx &= \int_0^2 (2x^4 - \frac{1}{2} x^6) dx = \left[\frac{2}{5} x^5 - \frac{1}{14} x^7 \right]_0^2 = \frac{128}{35} \end{aligned}$$

3) Kesalahan dalam Memilih dan Menggunakan Prosedur yang sesuai

Terdapat kesalahan dalam memilih dan menggunakan prosedur yang sesuai seperti pada gambar 3.

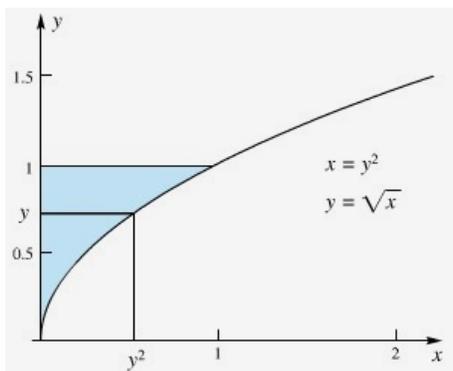


$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{y^2} 2ye^x dx dy &= \int_0^1 \left[2ye^x \right]_0^{y^2} dy \\ &= \int_0^1 [2ye^{y^2} - 2ye^0] dy \\ &= \int_0^1 (2ye^{y^2} - 2ye^0) dy \\ &= \int_0^1 2y dy - \int_0^1 2y dy = 0 \end{aligned}$$

Gambar 3. Jawaban Subjek A₁₁ dalam menggunakan prosedur yang sesuai

Pada gambar 3 dapat dilihat Subjek A₁₁ memilih dan menggunakan prosedur yang belum tepat. Tidak digambarkan daerah integrasi terlebih dahulu, kemudian terdapat prosedur yang salah yaitu $\int_0^1 (2ye^{y^2} - 2ye^0) dy = \int_0^1 2y dy - \int_0^1 2y dy = 0$ dalam hal ini konsep integral terhadap bilangan e belum menggunakan prosedur yang benar.

Dengan daerah pengintegrasian dapat dilihat pada gambar 4 berikut:



Gambar 4. Daerah Pengintegrasian

4) Kesalahan dalam Menggunakan Konsep dan Memilih Algoritma Penyelesaian Masalah

Terdapat kesalahan dalam menggunakan konsep dan memilih algoritma penyelesaian masalah seperti pada gambar 3 yang sudah dijelaskan sebelumnya.

Prosedur yang tepat sebagai berikut :

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 2ye^x dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} 2ye^x dx \right] dy = \int_0^1 [2ye^x]_0^{y^2} dy = \int_0^1 (2ye^{y^2} - 2ye^0) dy \text{ kemudian diperoleh :}$$
$$\int_0^1 e^{y^2} \cdot 2y dy - \int_0^1 2y dy = e - 2$$

Agar dapat menggunakan prosedur dan memilih algoritma penyelesaian masalah dengan tepat perlu diberikan latihan soal yang bervariasi. Selain itu perlu juga dilakukan tanya jawab dengan dosen pengampu agar dapat meminimalisir kesalahan dalam pemahaman konsep integral. Seperti yang dikemukakan Farhan & Zulkarnain (2019) bahwa beberapa hal yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan soal-soal integral adalah membaca dan memahami konsep dasar integral, melakukan latihan soal bervariasi dan berkonsultasi dengan dosen pengampu jika mengalami kendala. Dapat dinyatakan bahwa semakin bervariasi soal-soal integral yang diberikan, akan semakin banyak pula muncul indikator pemahaman konsep (Hw, 2017).

D. Simpulan

Berdasarkan konsep Integral Berulang bahwa $\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) dx \right] dy$. Dalam hal ini yang pertama fungsi $f(x,y)$ diintegrasikan terhadap x dengan batas a sampai b dan menganggap y konstan. Kemudian hasil integral terhadap x diintegrasikan terhadap y dengan batas c sampai d dan ditinjau dari indikator pemahaman konsep, dapat disimpulkan kesalahan pemahaman konsep mahasiswa pada materi integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang yaitu (1) menyatakan ulang konsep integral. Pada indikator ini, mahasiswa belum memahami dengan baik urutan dari variabel x dan y sebagai integran. Mahasiswa masih belum tepat menentukan batas atas dan bawah dari variabel x dan y . (2) Mempresentasikan fungsi $f(x,y)$ ke dalam grafik. Pada indikator ini mahasiswa langsung membuat sketsa tanpa membuat tabel pembantu, memplot titik dan membuat grafik. (3) Memilih dan menggunakan prosedur yang sesuai, dan (4) menggunakan konsep dan memilih algoritma penyelesaian masalah. Pada indikator (3) dan (4) ini, terdapat kesalahan mahasiswa dalam memilih dan menggunakan prosedur dan penggunaan algoritma pemecahan masalah disebabkan kurangnya pengetahuan awal mahasiswa terkait geometri, diferensial dan integral.

Daftar Pustaka

- Apriandi, D., & Ika, K. (2016). *Analisis Kesulitan Mahasiswa dalam Memahami Materi Integral Lipat Dua pada Koordinat Polar Mata Kuliah Kalkulus Lanjut*. Al Jabar, 7(2), 123-134.
- Farhan, M., & Zulkarnain, I. (2019). Analisis Kesalahan Mahasiswa pada Mata Kuliah Kalkulus Peubah Banyak Berdasarkan Newmann's Error Analisis. *JKPM Jurnal Kajian Pendidikan Matematika*, 4(2) 121-134. Doi: <https://dx.doi.org/10.30998/jkpm.v4i2.3843>
- Hs, S. (2017). *Kalkulus Peubah Banyak*. Surakarta: Muhammadiyah University Press
- Muchlis. E.E. (2017). Analisis Kesalahan Mahasiswa pada Materi Integral Lipat di Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Bengkulu. *Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika UNY (pp. 265-272)*. Yogyakarta: UNY
- Ningtyas, D. Y., Fuad, Y., & Lukito, A. (2019). Kemampuan Representasi Mahasiswa Pendidikan Matematika dalam Menyelesaikan Soal Kalkulus.

- Kreano, Jurnal Matematika Kreatif Inovatif*, 10(1), 27-36. Doi: <https://doi.org/10.15294/kreano.v10i1.17334>
- Nurhikmah, S., & Febrian, F. (2016). Analisis Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Permasalahan Integral Tak Tentu. *Jurnal Tatsqif*, 14(2), 218-237
- Rahma, S. U., Liana, S., & Lusinda, H. (2021). Kesalahan Pemahaman Konsep Peserta Didik dalam Menyelesaikan Soal-Soal Integral Lipat Dua pada Koordinat Polar. *Jurnal Inovasi Matematika (Inomatika)*, Vol. 3 No. 1, 51-61. Doi: 10.34538/inomatika.v3il.226.
- Raupu, S., Thalhah, S. Z., & Mattoliang, L. A. (2020). Learning Difficulties in Solving Calculus Tests. *MaPan : Jurnal Matematika dan Pembelajaran*, 8(2), 168-178. Doi: <https://doi.org/10.24252/mapan.2020v8n2a1>
- Sulistiyorini, Y. (2019). Gestur dalam Pembelajaran Matematika Materi Irisan Kerucut dan Koordinat Polar. *SUPERMAT Jurnal Pendidikan Matematika*, 3 (1), 1-9. Doi: <https://doi.org/10.33627/sm.v3i1.147>.
- Wahyuni, A., Kurniawan, P., Waluya, S. B., & Cahyini, A. N. (2019). Analisis Kesalahan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Integral. *Seminar Nasional Edusaintek FMIPA UNIMUS (pp. 623-629)*. Semarang: FMIPA Universitas Muhammadiyah Semarang